Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 11 -14/10 (versión preliminar)

Y dale con Nicholson

En la última clase probamos la existencia de soluciones N-periódicas positivas para la ecuación de Nicholson

$$\Delta x_k = -d_k x_k + p_k x_{k-\tau} e^{-x_{k-\tau}} \tag{1}$$

donde $d, p \in (0, +\infty)^{\mathbb{Z}}$ son N-periódicas y $\tau \in \{0, \ldots, N-1\}$. Para eso, definimos un operador de punto fijo en el espacio C_N de funciones N-periódicas, que se puede pensar directamente como $\mathbb{R}^N$ y vimos que una condición suficiente es $d_k < \min\{1, p_k\}$ para todo k. Pero al igual que en el caso continuo, el problema también se puede resolver empleando el operador de Poincaré, que responde a una idea diferente: resolver el problema de valores iniciales y tratar de "embocar" un dato inicial de manera tal que la solución correspondiente sea periódica. De esta forma, también buscamos un punto fijo pero ahora en el conjunto de valores iniciales. Para hacer esto, es útil encontrar una suerte de "expresión integral" para las soluciones similar a la del Lema de la clase previa. Pero en este caso no se trata de soluciones que sabemos periódicas de antemano, así que no queda más remedio que integrar desde el comienzo. Empecemos por observar que si

$$\Delta x_k + d_k x_k = \varphi_k$$

entonces la solución está dada por (ah, otra vez la inducción)

$$x_{k+1} = \prod_{j=0}^{k}(1-d_j)x_0 + \sum_{j=0}^{k} \varphi_j \prod_{s=j+1}^{k}(1-d_s). \tag{2}$$

Notemos que también para el problema de valores iniciales es fácil ver lo que ocurre si $\varphi_k = d_k$ para todo k: por unicidad, sabemos que la fórmula dada por (2) es la constante $x \equiv 1$, de donde se deduce una fórmula que -sospechamos- podría ser útil:

$$\prod_{j=0}^{k}(1-d_j) + \sum_{j=0}^{k} d_j \prod_{s=j+1}^{k}(1-d_s) = 1.$$

Pero si ahora queremos poner $\varphi_k = p_k x_{k-\tau} e^{-x_{k-\tau}}$, entonces vamos a necesitar conocer no solo x_0 sino $x_{-1}, \ldots, x_{-\tau}$; de esta forma, el operador de Poincaré va a estar definido sobre el conjunto de vectores

$$(x_{-\tau}, \dots, x_0) \in \mathbb{R}^{\tau+1}.$$

Específicamente, se trata de encontrar la solución correspondiente a ese valor inicial y entonces definir

$$P(x_{-\tau}, \dots, x_0) := (x_{N-\tau}, \dots, x_N).$$

Como en la demostración de la clase pasada, vamos a ver que existen $\varepsilon < M$ tales que el operador de Poincaré deja invariante el cubo de lado $[\varepsilon, M]$; la diferencia es que ahora no se trata del cubo de $\mathbb{R}^N$ sino de $\mathbb{R}^{\tau+1}$. Y, tal como ocurrió la vez pasada, la cota superior se consigue fácilmente: si $x_j \leq M$ para todo $j = -\tau, \dots, 0$, entonces usando el hecho de que $\varphi_j \leq \frac{p_j}{e}$ se deduce de (2) que

$$x_{k+1} \leq \prod_{j=0}^{k}(1-d_j)M + C$$

para cierta constante C. Y como el factor que acompaña a M es menor que 1, si elegimos M suficientemente grande vale $x_{k+1} \leq M$ para todo k. Hay que decir que la cota es bastante bruta, pero no es momento de andarnos con delicadezas (sin embargo, el procedimiento no está lejos del 'espíritu de fineza' que postulaba Pascal).

Vamos ahora a las cotas inferiores: una vez que fijamos M podemos elegir ε bien chiquito, como ya hicimos, de modo que $xe^{-x} \geq \varepsilon e^{-\varepsilon}$ si $\varepsilon \leq x \leq M$ y además $e^{-\varepsilon}p_k > d_k$. Entonces acotando en (2) queda

$$x_{k+1} > \varepsilon \left(\prod_{j=0}^{k}(1-d_j) + \sum_{j=0}^{k} d_j \prod_{s=j+1}^{k}(1-d_s) \right) = \varepsilon.$$

Pero para terminar de convencernos de que hay soluciones, podemos intentar todavía otro método, un ejemplo elemental de los llamados *métodos de continuación*. No se trata ahora de esquivar la resonancia sino más bien de salir a buscarla, zambullirnos en ella. Al margen de la pequeña licencia poética, se trata tan solo de inventar una homotopía apropiada para aplicar grado, pero de una manera tal que nos permita reducir la dimensión. Para eso, se puede recurrir a una ligera voltereta algebraica que es la siguiente.

En primer lugar, notemos que, al igual que en el caso continuo, la solución de un problema

$$\Delta x_k = \varphi_k$$

se obtiene directamente "integrando", lo que brinda de paso una interpretación muy razonable de lo que significa una suma telescópica:

$$x_{k+1} - x_0 = \sum_{j=0}^{k} \varphi_j.$$

Pero entonces es claro que hay una solución N-periódica si y solo si $\overline{\varphi} = 0$, donde $\overline{\varphi}$ denota el viejo y querido promedio $\overline{\varphi} := \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{k}\varphi_j$. Por supuesto, la solución en este caso no es única, pero podemos elegir una en particular, por ejemplo la que tiene promedio 0. Esto define un operador lineal $K : \tilde{C}_N \to \tilde{C}_N$, donde $\tilde{C}_N$ es el subespacio de aquellos elementos de promedio 0 de C_N; esta función K es una inversa a derecha del operador derivada, pues $\Delta(K\varphi) = \varphi$. De esta forma, si tomamos $\varphi_k = -d_k x_k + p_k x_{k-\tau} e^{-x_{k-\tau}} := N(x)_k$, encontrar una solución N-periíodica al problema de Nicholson equivale a encontrar $x \in C_N$ tal que

$$\overline{N(x)} = 0, \qquad x - \overline{x} = KN(x).$$

Si ahora queremos pensarlo como un problema de punto fijo, tenemos la dificultad de que dentro de K no se puede meter cualquier cosa: solamente acepta elementos de $\tilde{C}_N$. Pero siempre se puede recurrir a un truco algo deshonesto aunque eficaz: sumar 0. En efecto, mirando las dos ecuaciones juntas, es claro que no hace el menor daño restar a $N(x)$ su promedio antes de aplicarle K:

$$\overline{N(x)} = 0, \qquad x - \overline{x} = K(N(x) - \overline{N(x)}).$$

Las soluciones de ambos sistemas coinciden, pero el segundo tiene la ventaja de que la expresión dentro de K es válida para cualquier $x \in C_N$. Ahora viene el broche de oro: queremos expresar las dos ecuaciones anteriores por medio de una sola, para lo cual basta observar, en la segunda ecuación, que ambos términos siempre tienen promedio 0. Entonces si le sumamos un término constante, lo forzamos a que sea nulo: es la ocasión ideal para poner ahí, justamente, el promedio de $N(x)$. En otras palabras, el sistema anterior es equivalente a la ecuación de punto fijo

$$x = \overline{x} + \overline{N(x)} + K(N(x) - \overline{N(x)}).$$

Esto hace que tenga todo el sentido definir la función

$$F(x) = x - [\overline{x} + \overline{N(x)} + K(N(x) - \overline{N(x)})]$$

e intentar calcular su grado mediante una homotopía. Y no vamos a proponer nada del otro mundo, simplemente la homotopía lineal

$$h(x, \lambda) = x - [\overline{x} + \overline{N(x)} + \lambda K(N(x) - \overline{N(x)})].$$

Para $\lambda > 0$ se ve, como antes, que $x \in C_N$ es solución si y solo si verifica $\Delta x_k = \lambda N(x)_k$, y es un buen ejercicio buscar $\varepsilon < M$ tales que cualquier posible solución verifique $\varepsilon < x_k < M$. Veamos que pasa al final (mejor dicho, al comienzo) de la homotopía: cuando $\lambda = 0$, la función h se anula si y solo si

$$x = \overline{x} + \overline{N(x)}.$$

En particular, x tiene que ser constante, y es fácil ver que $h(x, 0) \neq 0$ cuando $x \equiv \varepsilon$ o $x \equiv M$. De esta forma,

$$\deg(F_1, (\varepsilon, M)^N, 0) = \deg(F_0, (\varepsilon, M)^N, 0).$$

Al cabo de tanto trabajo, uno podría preguntarse dónde está la ganancia y, más específicamente, la prometida reducción de dimensión. El asunto es que $F_0(x) = x - (\overline{x} + \overline{N(x)})$ tiene una pinta especialmente buena: es la identidad (que es buenísima) sumada a un término que cae en un subespacio de dimensión menor (1, sin ir muy lejos). Por eso, el siguiente lema nos augura grandes éxitos en el futuro inmediato:

Lema 0.1 *Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua tal que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\} \simeq \mathbb{R}^k$ para cierto $k < n$. Supongamos que para cierto abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vale $g(x) \neq x$ para $x \in \partial\Omega$. Entonces*

$$\deg(Id - g, \Omega, 0) = \deg((Id - g)|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^k}, \Omega \cap \mathbb{R}^k, 0).$$

<u>*Demostración*</u>: Alcanza con suponer que g es suave y 0 es valor regular de $f := Id - g$. En tal caso, si x es un cero de f, entonces $x_j = 0$ para $j > k$ y además

$$Df(x) = \begin{pmatrix} I_k - \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq k} & -\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i \leq k < j \leq n} \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

y el resultado se deduce de manera inmediata.

□

En definitiva, lo que el lema dice es que si queremos calcular el grado de $Id - g$, alcanza con mirar su restricción al subespacio donde vive su imagen. Por supuesto, no importa si el subespacio no es exactamente $\mathbb{R}^k$, porque la noción de grado de Brouwer se extiende de manera automática a cualquier espacio normado de dimensión finita: agarramos el primer isomorfismo $\phi : V \to \mathbb{R}^k$ que se nos cruce y definimos, para $f : \overline{\Omega} \to V$ continua tal que $y \notin f(\partial\Omega)$

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(\phi f \phi^{-1}, \phi(\Omega), \phi(y)),$$

que (ejercicio) no depende de ϕ. De esta forma, en nuestra situación nicholsoniana, tenemos $F_0 = Id - g$, donde $g(x) = \overline{x} + \overline{N(x)}$, que cae en el conjunto de funciones constantes de C_N, que podemos identificar con $\mathbb{R}$. Pero si x es constante, es claro que coincide con su promedio, de modo que

$$F_0(x) = -\overline{N(x)} = x\left(-\overline{d} + \overline{p}e^{-x}\right).$$

De esta forma, para ε muy chico vale $F_0(\varepsilon) > 0$ y para $x = M \gg 0$ vale $F_0(M) < 0$, es decir:

$$\deg(F_0, (\varepsilon, M)^N, 0) = \deg(F_0|_{\mathbb{R}}, (\varepsilon, M), 0) = -1.$$

A modo de ejercicio, supongamos que la ecuación tiene un término más:

$$\Delta x_k = -d_k x_k + p_k x_{k-\tau} e^{-x_{k-\tau}} - H(x_k) \tag{3}$$

Aquí la H no tiene nada que ver con homotopías sino que viene de *harvesting*, que quiere decir recolección o cosecha y eso explica por qué aparece restando:

además de los individuos que mueren, se asume que alguien, de manera malvada y no lineal, elimina de la población una cierta cantidad de individuos, que es función de la población total en ese instante. Aquí la cuenta directa con Brouwer se pone más difícil, pero el lector puede intentar usar el método de continuación para demostrar que existe al menos una solución N-periódica positiva, bajo las siguientes condiciones:

1. $d_k + H'(r) < 1$ para todo k y todo r.
2. $d_k + H'(0) < p_k$ para todo k.

Observación 0.2 *El procedimiento anterior puede generalizarse a un contexto más abstracto. Supongamos que $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador lineal con nucleo $\ker(L)$ no trivial y, de paso, pedimos que $\ker(L) \neq \mathbb{R}^n$ a fin de que nuestro problema no se transforme en algo completamente bobo. Elijamos ahora una proyección sobre el núcleo, la que más nos guste. Para que quede claro: con esto nos referimos a un operador lineal $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $P^2 = P$ y además $\mathrm{Im}(P) = \ker(L)$. Por esas cosas de los proyectores, es claro entonces que*

$$\mathbb{R}^n = \ker(L) \oplus E,$$

donde $E := \ker P$. Además $L|_E : E \to \mathrm{Im}(L)$ es un isomorfismo, así que tiene una inversa que podemos llamar K. En este ámbito tan algebroso, decir que $Lx = y$ significa en realidad dos cosas:

1. $y \in \mathrm{Im}(L)$

2. $x - Px = Ky$.

Y, ya que estamos, también podemos definir otro proyector $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\ker(Q) = \mathrm{Im}(L)$, así la primera condición se escribe de manera más canchera: $Qy = 0$. Pero como antes, vale también

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(L) \oplus F,$$

donde $F := \mathrm{Im}(Q)$. Ahora por esas cosas de la dimensión, sabemos que existe también un isomorfismo $J : F \to \ker(L)$.

Como antes, supongamos que queremos resolver una ecuación del tipo $Lx = N(x)$, donde $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es alguna función continua. En la situación anterior, esto querría decir que

$$QN(x) = 0, \qquad x - Px = KN(x)$$

y para pensarlo como problema de punto fijo nos topamos con el hecho de que $N(x)$ no se mete despreocupadamente dentro de K. ¿Qué tal si primero lo proyectamos? Esto no es otra cosa que restarle $Q(N(x))$ y, en virtud de la primera igualdad, la opereta no modifica en nada nuestro problema:

$$QN(x) = 0, \qquad x - Px = K(N(x) - QN(x)).$$

Llega el momento de juntar todo en una ecuación, sumando un término al que, igual que antes, 'forzamos' para que sea 0. *Para ello, observemos que ambos miembros de la segunda ecuación pertenecen, para todo* x, *al núcleo de* P. *Esto explica nuestro anterior afán por definir el isomorfismo* J: *si ponemos*

$$x - Px = JQN(x) + K(N(x) - QN(x)), \tag{4}$$

es claro que si x *es solución del sistema anterior entonces resuelve esta última ecuación, ya que* $QN(x) = 0$. *Recíprocamente, si* x *es una solución de (4) entonces* $JQN(x) \in \ker(P)$, *pero... atenti: la imagen de* J *coincide justamente con* $\operatorname{Im}(P)$, *cuya intersección con* $\ker(P)$ *es trivial. Luego* $JQN(x) = 0$ *y en consecuencia* $QN(x) = 0$. *En otras palabras, el problema* $Lx = N(x)$ *equivale a la ecuación de punto fijo*

$$x = Px + JQN(x) + K(N(x) - QN(x))$$

y entonces uno define, como en el ejemplo previo, la homotopía lineal

$$h(x, \lambda) = x - [Px + JQN(x) + \lambda K(N(x) - QN(x))].$$

El teorema de continuación que se deduce es el siguiente:

Teorema 0.3 *Supongamos que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *es un abierto acotado tal que*

1. *La ecuación* $Lx = \lambda N(x)$ *no tiene soluciones en* $\partial\Omega$ *para* $\lambda \in (0, 1]$.
2. $QN(x) \neq 0$ *para* $x \in \partial\Omega \cap \ker(L)$.
3. $\deg(JQN, \Omega \cap \ker(L), 0) \neq 0$.

Entonces el problema $Lx = N(x)$ *tiene al menos una solución* $x \in \Omega$.

Aunque algo abstracto y trabajoso, el desarrollo anterior permite entender fácilmente lo que va a ocurrir en el caso continuo, que también se puede escribir en la forma $Lx = N(x)$. *La dimensión del espacio se vuelve infinita y por eso el grado no es el de Brouwer sino el de Leray-Schauder. Y, para que todo ande bien, vamos a necesitar pedirle algunas cosillas a los operadores. Lo sorprendente es que al final del día el problema original se reduce a calcular el grado de una función definida en* $\ker(L)$, *que se asume de dimensión finita. Llegado este punto y pensando además en el isomorfismo* J, *definido sobre el complemento de* $\operatorname{Im}(L)$, *quienes hayan cursado análisis funcional no pueden dejar de evocar a Fredholm.*